Kapitel 2 II

Teil I

Das Ball-Box Theorem

Sei Q Mannigfaltigkeit mit Dimension n.

Definition 1 (Lie-generierend)
Eine Distribution $\mathcal{H} \subset TQ$ wird LIE-GENERIEREND genannt, falls eine beliebige lokale Basis X_i für $\mathcal{H}$ zusammen mit ihren iterierten Lie-Klammern $[X_i,X_j]$, $[X_i,[X_j,X_k]]$, ... , also deren LIE-HÜLLE, das ganze Tangentialbündel TQ aufspannt.

Die Lie-Klammern von Vektorfeldern von $\mathcal{H}$ erzeugen eine FAHNE von Unterbündeln

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^2 \subset \cdots \subset \mathcal{H}^r \subset \cdots \subset TQ,$$

mit

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} + [\mathcal{H}, \mathcal{H}], \quad \mathcal{H}^{r+1} = \mathcal{H}^r + [\mathcal{H}, \mathcal{H}^r]$$

wo

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}^k] = \operatorname{span}\{[X, Y] : X \in \mathcal{H}, Y \in \mathcal{H}^k\}.$$

Wir machen von nun an die Annahme dass $\mathcal{H}$ Lie-generierend ist. Dies besagt, dass es ein $r(q)$ gibt so dass $\mathcal{H}_q^r = T_qQ$.

$X_1, \ldots, X_k$ bilde ein orthonormierte Basis (ONB) von $\mathcal{H}$ auf $U \subset Q$, d.h. $X_1(q), \ldots, X_k(q)$ ist ONB von $\mathcal{H}_q, \forall q \in U$. Da die $X_1, \ldots, X_k$ Lie-generierend sind, gibt es Vektorfelder $Y_1, \ldots, Y_n$ bestehend aus iterierten Lie-Klammern der Basis $X_1, \ldots, X_k$, so dass $Y_1(= X_1), \ldots, Y_{n_1=k}(= X_k)$ Basis von $\mathcal{H}$, $Y_{n_1+1}, \ldots, Y_{n_2}$ Basis von $\mathcal{H}^2/\mathcal{H}$, usw. ist. Hier bezeichnet n_i die Dimension von $\mathcal{H}^i$.

Der Vektor $(n_1(q), \ldots, n_r(q))$ wird als WACHSTUMS-VEKTOR von $\mathcal{H}$ im Punkt q bezeichnet. Bemerke dass $n_1 = k$ dem Rang der Distribution $\mathcal{H}$ und $n_r = n$ der Dimension der Mannigfaltigkeit entspricht. Eine Distribution $\mathcal{H}$ heisst REGULÄR im Punkt $q \in Q$ falls der Wachstums-Vektor in einer Umgebung des Punktes q konstant ist.

Definition 2 (Gewichtung)
Das Vektorfeld Y_i hat das Gewicht $w_i \equiv m$ genau dann wenn $Y_i \in \mathcal{H}^m$ und $Y_i \notin \mathcal{H}^{m-1}$. Die Zuordnung $i \longrightarrow w_i$ wird als GEWICHTUNG bezeichnet.

Betrachten wir die Funktion $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow Q : (t_1, \ldots, t_n) \longrightarrow \Phi_n^{t_n} \circ \cdots \circ \Phi_1^{t_1}(q_0)$. Dabei sind die $\Phi_i^{t_i}$ die zugehörigen lokalen Flüsse der Vektorfelder Y_i. Das Differential $dF\mid_0$ ist surjektiv, da $\operatorname{span}\{Y_1(q_0), \ldots, Y_n(q_0)\} = T_{q_0}M$, d.h. 0 ist ein regulärer Punkt von F und es folgt, dass F ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Es gibt also eine offene Umgebung U von 0 in $\mathbb{R}^n$ so dass $F : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow F(U) \equiv V \subset Q$ Diffeomorphismus ist. Dies definiert uns einer Karte $x \equiv F^{-1}$ und somit Koordinaten auf V um q_0. Diese Koordinaten x_i werden als FLUSSKOORDINATEN oder LIE-KOORDINATEN DER ZWEITEN ART bezeichnet.

Definition 3 (Linear adaptierte Koordinaten)
Koordinaten $y_1, \dots, y_n$ werden als LINEAR ADAPTIERT zur Distribution $\mathcal{H}$ bei q_0 bezeichnet falls $\mathcal{H}^i(q_0)$ durch die Differentiale $dy_{n_i+1}, \dots, dy_n$ annihiliert wird.

Satz 1
Die Flusskoordinaten x_i sind linear adaptierte Koordinaten. Das bedeutet dass

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^i(q_0) &= \operatorname{span}\{Y_1(q_0), \dots, Y_{n_i}(q_0)\} \\ &= \{X \in T_{q_0}Q : dx_l(X) = 0, \quad l = n_i + 1, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Beweis (Satz 1)
" $\subseteq$ "

$\frac{\partial}{\partial x^j}(q_0) \equiv F_*(0)\frac{\partial}{\partial t^j} = Y_j(q_0)$ somit folgt

$dx_l(Y_j(q_0)) = dx_l\left(\frac{\partial}{\partial x^j}(q_0)\right) \equiv \delta_{lj} = 0$, da $1 \leq j \leq n_i$ und $n_i + 1 \leq l \leq n$.

" $\supseteq$ "

Sei $X(q_0) = \sum_{i=1}^n X^i Y_i(q_0)$ mit $dy_l(X) = 0$, $l = n_i + 1, \dots, n$

$\Longrightarrow dy_l(X) = \sum_{i=1}^n X^i \, dy_l(Y_i) = \sum_{i=1}^n X^i \, \delta_{li} = X^l = 0$, für $l = n_i + 1, \dots, n$

$\Longrightarrow X \in \operatorname{span}\{Y_1, \dots, Y_{n_i}\}$ $\square$

Theorem (Ball-Box)
Es existieren linear adaptierte Koordinaten $y_1, \dots, y_n$ und positive Konstanten $c < C$ und $\epsilon_0 > 0$ so dass für alle $\epsilon < \epsilon_0$

$$Box^w(c\epsilon) \subset B(q_0, \epsilon) \subset Box^w(C\epsilon),$$

wobei $Box^w(\epsilon) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i| \leq \epsilon^{w_i}, \ i = 1, \dots, n\}$ die W-GEWICHTETE BOX DER GRÖSSE ϵ und $B(q_0, \epsilon)$ den SUBRIEMANNSCHEN BALL MIT RADIUS ϵ um q_0 bezeichnet.

Beweis (Ball-Box)
Siehe [1], Seite 29 - 34.

Als Anwendung des Ball-Box Theorems werden wir das Topologische Theorem beweisen.

Theorem (Topologisches Theorem)
Falls $\mathcal{H}$ eine Lie-generierende Distribution auf Q ist, so ist die durch die subriemannsche Metrik induzierte Topologie auf Q die gewöhnliche Topologie der Mannigfaltigkeit.

Definition 4 (Gleichheit von Topologien)
Zwei Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ eines Raumes Q sind GLEICH, falls für jeden Punkt $q \in Q$ in jeder Topologie Umgebungsbasen $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1$ und $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{T}_2$ in q existieren, so dass es für jedes $B \in \mathcal{B}_1$ Mengen $U, V \in \mathcal{B}_2$ mit $U \subset B \subset V$ gibt .

Beweis (Topologisches Theorem)
Es sei $\mathcal{T}_1$ die Topologie induziert durch die subriemannsche Metrik und $\mathcal{T}_2$ die Standardtopologie der Mannigfaltigkeit. Die Standardbasen bei q von $\mathcal{T}_1$ sind die offenen subriemannschen Bälle $\mathcal{B}_1 = \{B(q,\epsilon) : \epsilon > 0\}$. Für $\mathcal{B}_2$ nehmen wir alle Umgebungen von q relativ zur Topologie $\mathcal{T}_2$.

Es sei $V \in \mathcal{B}_2$. Wir wählen nun eine riemannsche Metrik die die subriemannsche Metrik zähmt, d.h. das innere Produkt stimmt für horizontale Vektoren überein. Die riemannschen Bälle $B_R(q,\epsilon)$ bilden eine Umgebungsbasis von q und wir finden sicher einen Ball $B_R(q,\epsilon) \subset V$. Aber der subriemannsche Ball mit gleichem Radius ist immer im riemannschen Ball enthalten, d.h. $B(q,\epsilon) \subset B_R(q,\epsilon)$ und somit folgt $B = B(q,\epsilon) \subset V$.

Das Ball-Box Theorem besagt nun, dass es immer eine offene Box $U = Box^w(q,\epsilon)$ gibt so dass $U \subset B = B(q,\epsilon)$. $\square$

Teil II
Das Hausdorff Mass

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $\Omega \subset M$. Es sei weiter $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ eine Überdeckung von Ω und s eine nicht negative Zahl. Für irgend ein $U \subset M$ ist die Zahl $\mathrm{diam}(U) \equiv \sup_{x,y\in U} d(x,y)$ der Durchmesser von U. Setze

$$\mu^s(\Omega,\mathcal{U}) \equiv \sum_\alpha (\mathrm{diam}(U_\alpha))^s.$$

Dies ist das APPROXIMATIVE S-DIMENSIONALE HAUSDORFF MASS von Ω . Wir benützen die Notation $|\mathcal{U}| < \epsilon$ um zu bezeichnen, dass jedes $U_\alpha \in \mathcal{U}$ einen kleineren Durchmesser als ϵ hat. Das ϵ-APPROXIMATIVE S-DIMENSIONALE HAUSDORFF MASS von Ω ist die Zahl

$$\mu^s_\epsilon(\Omega) \equiv \inf\{\mu^s(\Omega,\mathcal{U}) : |\mathcal{U}| < \epsilon\}.$$

Definition 5 (Hausdorff Mass)
Sei $\mu^s(\Omega) \equiv \lim_{\epsilon\to 0} \mu^s_\epsilon(\Omega)$. Die Zahl $\mu^s(\Omega)$ wird als das S-DIMENSIONALE HAUSDORFF MASS von Ω bezeichnet.

Definition 6 (Hausdorff Dimension)
Der Wert $D \equiv \sup\{s \geq 0 : \mu^s(\Omega) > 0\}$ wird HAUSDORFF DIMENSION von Ω genannt.

Das Hausdorff Mass hat die Eigenschaft dass $\mu^s(\Omega) = +\infty$ für alle $s < D$ und $\mu^s(\Omega) = 0$ für alle $s > D$. Der Wert von $\mu^D(\Omega)$ kann 0, $+\infty$ oder endliche Zahl sein. Wenn wir also für irgend ein t, $\mu^t(\Omega) = C$ mit $0 < C < +\infty$ finden, wissen wir, dass t die Hausdorff Dimension von Ω ist.

Zwei Masse μ und ν heissen ABSOLUTSTETIG falls sie die gleichen Nullmengen besitzen also $\mu(A) = 0$ die Gleichung $\nu(A) = 0$ impliziert und umgekehrt. Es ist dazu äquivalent zu sagen, dass es positive Konstanten $c < C$ gibt so dass $c\nu \leq \mu \leq C\nu$.

Wenn wir darauf bestehen dass die Überdeckungen $\mathcal{U}$ von Ω nur Bälle sein dürfen, dann definieren wir das so genannte S-DIMENSIONALE HAUSDORFF BALL MASS μ^s_{Ball}. Das Hausdorff Ball Mass und das Standard Hausdorff Mass sind absolutstetig zueinander und es gilt

$$1/2^s\,\mu^s_{Ball} \leq \mu^s \leq \mu^s_{Ball}.$$

Die Ungleichung $\mu^s \leq \mu^s_{Ball}$ ist gültig, da wir für das Ball Mass die verfügbaren Überdeckungen einschränken über die wir das Infimum nehmen. Für die andere Ungleichung betrachten wir eine Menge U mit $\mathrm{diam}(U) < \epsilon$. Für ein beliebiges $x \in U$ gilt dann $U \subset B(x, \mathrm{diam}(U))$. Also können wir jeder offenen Überdeckung $|\mathcal{U}| \leq \epsilon$ von Ω eine Ball Überdeckung $|\mathcal{B}| \leq 2\epsilon$ zuordnen mit $B_\alpha = B(x, \mathrm{diam}(U_\alpha)), \quad x \in U_\alpha$. Es folgt aus der Definition

$$1/2^s \sum_{\mathcal{B}} (\mathrm{diam}(B_\alpha))^s = \sum_{\mathcal{U}} (\mathrm{diam}(U_\alpha))^s.$$

Nun nehmen wir das Infimum und erhalten

$$1/2^s\,\mu^s_{Ball\,2\epsilon}(\Omega) \leq \mu^s_\epsilon(\Omega).$$

Schliesslich folgt im $\lim_{\epsilon\to 0}$

$$1/2^s\,\mu^s_{Ball}(\Omega) \leq \mu^s(\Omega).$$

Wie wir bereits gesehen haben, ist $n_i = \mathrm{dim}(\mathcal{H}^i)$. Wir definieren nun

$$k_i \equiv n_i - n_{i-1} = \mathrm{dim}(\mathcal{H}^i/\mathcal{H}^{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, r$$

mit $k_1 \equiv k = \mathrm{dim}(\mathcal{H})$. Somit ist $\sum_1^r k_i = n$ die topologische Dimension von Q. Diese k_i werden als GRADUIERTE DIMENSIONEN der Distribution bezeichnet.

Theorem (Mitchell Mass Theorem)
Sei $D \equiv \sum_1^r i\,k_i$. Das D-dimensionale Hausdorff Mass in der nähe eines regulären Punktes ist absolutstetig bezüglich eines Lebesgue Masses. Insbesondere ist die Hausdorff Dimension einer subriemannschen Mannigfaltigkeit in einem regulären Punkt gleich D.

Beweis (Mitchell Mass Theorem)
Es genügt zu zeigen, dass das Lebesgue Mass und das D-Dimensionale Hausdorff Ball Mass absolutstetig sind und dass das D-dimensionale Hausdorff Mass einer beliebigen kleinen offenen Menge eine endliche Zahl ungleich 0 ist.

Die Konstanten c und C aus dem Ball-Box Theorem können in einer Umgebung eines regulären Punktes einheitlich gewählt werden. Wir wählen solche Konstanten, nennen unsere Box Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und schreiben $\mathrm{Vol}(\Omega)$ für das Koordinaten Lebesgue Mass einer offenen Menge $\Omega \neq \emptyset$.

Das Lebesgue Mass einer $Box(x, \epsilon)$ ist $2^n \epsilon^D$, da mit $Box^w(x, \epsilon) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \epsilon^{w_1}\, i = 1, \ldots, n\}$ das Volumen $\mathrm{Vol}(Box^w(x, \epsilon)) = \prod 2\epsilon^{w_i} = 2^n \epsilon^{\sum w_i}$ ist. Mit

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n_1 \equiv k_1} + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{n_2 - n_1 \equiv k_2} + \ldots + \underbrace{r + \ldots + r}_{n_r - n_{r-1} \equiv k_r} = \sum_{i=1}^{r} i\, k_i = D.$$

Nehmen wir nun das Lebesgue Mass der Inklusionen des Ball-Box Theorems, so erhalten wir

$$2^n (c\epsilon)^D \leq \mathrm{Vol}(B(x, \epsilon)) \leq 2^n (C\epsilon)^D.$$

Dies können wir mit $c_0^D = 2^{n-D} c^D$ beziehungsweise $C_0^D = 2^{n-D} C^D$ schreiben als

$$c_0^D (2\epsilon)^D \leq \mathrm{Vol}(B(x, \epsilon)) \leq C_0^D (2\epsilon)^D.$$

Der Durchmesser eines Balls $B(x, \epsilon)$ ist ja bekanntlich 2ϵ. Wir summieren nun diese Ungleichung über Bälle in einer subriemannschen Ball Überdeckung $\mathcal{B}$ von Ω und erhalten

$$c_0^D \mu_{Ball}^D(\Omega, \mathcal{B}) \leq \sum_{\mathcal{B}} \mathrm{Vol}(B) \leq C_0^D \mu_{Ball}^D(\Omega, \mathcal{B})$$

Nun gilt sicher

$$\mathrm{Vol}(\Omega) \leq \sum_{\mathcal{B}} \mathrm{Vol}(B),$$

und wir erhalten die Ungleichung $0 < \mathrm{Vol}(\Omega) \leq C_0^D \mu_{Ball}^D(\Omega)$.

Um die andere Ungleichung $c_0^D \mu_{Ball}^D(\Omega) \leq \mathrm{Vol}(\Omega) < \infty$ zu erhalten, kann man den Satz von Vitali anwenden um zu zeigen, dass $\sum_{\mathcal{B}} \mathrm{Vol}(B)$ beliebig nahe an $\mathrm{Vol}(\Omega)$ ist. $\square$

Beispiel (Heisenberg Gruppe)
Der Wachstums-Vektor der Heisenberg Gruppe ist (2,3), d.h. $k_1 = 2$ und $k_2 = 1$. Es folgt daraus, dass $D = 1k_1 + 2k_2 = 4$ die Hausdorff Dimension der Heisenberg Gruppe ist.

Literatur

[1] Montgomery R., A Tour of Subriemannian Geometrics, Their Geodesics and Applications, AMS 2002, ISBN 0-8218-1391-9

[2] Lang U., Skript zur Vorlesung Differentialgeometrie I & II, ETHZ WS01/SS02

[3] Bronstein I.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Mühlig H., Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch 1996, ISBN 3-8171-2003-6

Seminar über Differentialgeometrie, Prof. Urs Lang, 13. Mai 2002
Marcel Zemp, marcel_zemp@hotmail.com